

УДК 517.927.2

doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-6

Численный метод решения системы интегральных уравнений в задаче о распространении электромагнитных волн в стержне, покрытом графеном

Ю. Г. Смирнов¹, М. А. Москалева²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹mmm@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается задача о распространении электромагнитных волн в диэлектрическом стержне произвольного сечения, покрытом слоем графена, который считается бесконечно тонким. Основная задача при описании процесса распространения волн в волноведущей структуре – получение и анализ системы интегральных уравнений для определения постоянных распространения. *Материалы и методы.* Решаются уравнения Максвелла в частотной области. Условия сопряжения содержат проводимость графена. Применен метод функций Грина. *Результаты и выводы.* Численно решается система интегральных уравнений для определения постоянных распространения. Представлены результаты расчетов.

Ключевые слова: графен, интегральное уравнение, функция Грина, численный метод

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11-20087).

Для цитирования: Смирнов Ю. Г., Москалева М. А. Численный метод решения системы интегральных уравнений в задаче о распространении электромагнитных волн в стержне, покрытом графеном // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 4. С. 60–74. doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-6

A numerical method for solving a system of integral equations in the problem of electromagnetic waves' propagation in a graphene rod

Yu.G. Smirnov¹, M.A. Moskaleva²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹mmm@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* The problem of electromagnetic waves' propagation in a dielectric rod of arbitrary cross-section covered with a layer of graphene, which is considered infinitely thin, is considered. The main problem in describing the process of wave propagation in the waveguiding structure is to obtain and analyze the system of integral equations to determine propagation constants. *Materials and methods.* Maxwell's equations are solved in the frequency domain. The coupling conditions contain the conductivity of graphene. The method of Green's functions is applied. *Results and conclusions.* The system of integral equations for determining the propagation constants is solved numerically. Numerical results are presented.

Keywords: graphene, integral equation, Green's function, numerical method

Financing: the research was financed by the RSF within the research project No. 20-11-20087.

© Смирнов Ю. Г., Москалева М. А., 2023. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

For citation: Smirnov Yu.G., Moskaleva M.A. A numerical method for solving a system of integral equations in the problem of electromagnetic waves' propagation in a graphene rod. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2023;(4):60–74.* (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-6

Введение

При изучении волноведущих структур, содержащих новые материалы, такие как графен, возникают краевые задачи электродинамики нового типа, когда условия сопряжения на границе диэлектриков содержат бесконечно тонкий проводящий слой графена [1–4]. При этом необходимо как теоретическое исследование свойств задачи, так и разработка численных методов для ее решения и проведение расчетов электродинамических характеристик конкретных структур.

В настоящей статье рассматривается открытая волноведущая структура – расположенный в свободном пространстве круглый диэлектрический стержень произвольного поперечного сечения, покрытый слоем графена. Целью статьи является численное исследование спектра собственных волн, которые могут существовать в структуре.

В статье изучена система интегральных уравнений, к которой сводится краевая задача. Эта система решается численно для конкретной волноведущей структуры – круглого стержня.

Для сведения задачи к системе интегральных уравнений использовался метод функций Грина. Для таких областей, как круг и внешность круга, функции Грина известны, поэтому в рассматриваемом случае система интегральных уравнений записывается в явном виде.

Для численного решения задачи применяется проекционный метод. Результаты расчетов дисперсионных кривых для круглого стержня, покрытого слоем графена, также представлены в работе.

Результаты о распространении поляризованных электромагнитных волн в другой волноведущей структуре (диэлектрической пластине, покрытой графеном) имеются в [5–7].

1. Постановка задачи

Рассмотрим регулярную (вдоль оси Oz) открытую волноведущую структуру, поперечное сечение которой плоскостью $z = \text{const}$ образовано внутренней ограниченной областью Ω_1 с гладкой границей Γ и внешней неограниченной областью Ω_2 , являющейся дополнением в \mathbf{R}^2 к Ω_1 . Будем предполагать, что пространство заполнено однородными изотропными диэлектриками с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_j в области Ω_j , причем $\text{Re}\epsilon_j > 0$, $\text{Im}\epsilon_j \geq 0$, $\mu_j = 1$ ($j=1,2$). На границе раздела сред Γ расположен бесконечно тонкий слой графена.

Требуется решить задачу на собственные значения (о собственных волнах волноведущей структуры), состоящую в нахождении нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла с зависимостью $e^{-i\gamma z}$ от координаты z [8]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\varepsilon\mathbf{E}, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \\ \mathbf{E} &= (E_x(x, y)\mathbf{x} + E_y(x, y)\mathbf{y} + E_z(x, y)\mathbf{z})e^{-i\gamma z}, \\ \mathbf{H} &= (H_x(x, y)\mathbf{x} + H_y(x, y)\mathbf{y} + H_z(x, y)\mathbf{z})e^{-i\gamma z}, \end{aligned} \quad (1)$$

с условиями сопряжения для касательных составляющих полей на Γ :

$$[H_\tau]_\Gamma = -\sigma E_z|_\Gamma, \quad (2)$$

$$[H_z]_\Gamma = \sigma E_\tau|_\Gamma, \quad (3)$$

$$[E_\tau]_\Gamma = 0, \quad (4)$$

$$[E_z]_\Gamma = 0, \quad (5)$$

и условиями на бесконечности.

Через n обозначен орт внешней нормали к Ω_1 , τ – касательный орт такой, что выполнено условие $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \tau \times n$ (\times обозначает векторное произведение). Квадратные скобки $[f]_\Gamma = f_2|_\Gamma - f_1|_\Gamma$ означают разность следов функций на разных сторонах Γ , т.е. в областях Ω_2 и Ω_1 . Система уравнений Максвелла (1) записана в нормированном виде; осуществлен переход к безразмерным величинам [8, 9]: $k_0x \rightarrow x$, $k_0y \rightarrow y$, $k_0z \rightarrow z$, $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$; $k_0^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$, где ε_0 , μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума (временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен).

Слой графена описывается условием сопряжения вида $[n \times H]_\Gamma = \sigma E_\tau|_\Gamma$, где проводимость σ предполагается комплексной величиной. Проводимость в инфракрасном и терагерцовом диапазоне частот может быть и нелинейной вида

$$\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(3)} \left(|E_\tau|_\Gamma|^2 + |E_z|_\Gamma|^2 \right). \quad (6)$$

Задача о нормальных волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра γ – нормированной постоянной распространения (затухания) волноведущей структуры.

При $\gamma^2 \neq \varepsilon_1$, $\gamma^2 \neq \varepsilon_2$ поле нормальной волны в волноводе может быть выражено через две скалярные функции [8, 9]:

$$\Pi(x, y) = iE_z(x, y), \quad \Psi(x, y) = iH_z(x, y). \quad (7)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению продольных компонент электрического и магнитного полей, т.е. функций Π и Ψ .

Для Π и Ψ из (1)–(5) имеем следующую задачу на собственные значения: найти такие $\gamma \in \mathbb{C}$, при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta \Pi + \tilde{k}^2 \Pi &= 0, \quad (x, y) \in \Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ \Delta \Psi + \tilde{k}^2 \Psi &= 0, \quad \tilde{k}^2 = \tilde{k}_j^2 = \varepsilon_j - \gamma^2, \end{aligned} \quad (8)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения на Γ :

$$\begin{aligned} [\Pi]_{\Gamma} = 0, \quad [\Psi]_{\Gamma} &= i\sigma \left(\frac{\gamma}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} - \frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma}, \quad \gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right]_{\Gamma} + \left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right]_{\Gamma} = i\sigma \Pi \Big|_{\Gamma}, \\ \gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \right]_{\Gamma} - \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right]_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

и условиям на Зоммерфельда бесконечности для вещественных значений \tilde{k}_2 :

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Psi \end{pmatrix} - i\tilde{k}_2 \begin{pmatrix} \Pi \\ \Psi \end{pmatrix} = o(r^{-1/2}), \quad \text{Im } \tilde{k}_2 = 0, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Мы рассматриваем задачу при комплексных γ , поэтому решение при вещественных \tilde{k}_2 аналитически продолжается по γ в комплексную плоскость.

Будем искать решение задачи в пространствах Соболева $\Pi, \Psi \in H^1(\Omega_1)$, $\Pi, \Psi \in H_{loc}^1(\Omega_2)$. При этом равенство нулю в уравнениях (8), (9) понимается в смысле распределений [10].

В условиях сопряжения на Γ следы понимаются как элементы пространств

$$\Pi_j \Big|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \Psi_j \Big|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma); \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial \Pi_j}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma}, \quad \frac{\partial \Psi_j}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (12)$$

где Π_j и Ψ_j – сужение Π и Ψ на Ω_j .

2. Система интегральных уравнений

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения (1)–(5). Пусть Π и Ψ – решение этой задачи. Запишем интегральные представления Π и Ψ внутри Ω_j через значения, которые эти функции или их нормальные производные принимают на границе $\partial\Omega_j$.

Пусть $G_j^{\Pi}(x, y, x_0, y_0)$, $G_j^{\Psi}(x, y, x_0, y_0)$ – функции Грина соответственно первой и второй краевой задачи для уравнений Гельмгольца (1) с коэффициентами \tilde{k}_j^2 в области Ω_j ; $j=1, 2$. Вопросы существования и постро-

ения функций Грина рассмотрены, например, в [11]. Явные выражения функций Грина для важных частных случаев, когда области есть круг и внешность круга, имеются в [12]. Отметим, что функции Грина $G_2^\Pi(x, y, x_0, y_0)$, $G_2^\Psi(x, y, x_0, y_0)$ будут иметь точки ветвления $\gamma_\pm = \pm\sqrt{\varepsilon_2}$. Необходимо заполнить разрезы комплексной плоскости, соединяющие эти две точки, для однозначности определения функций Грина и аналитического продолжения. Кроме того, функции Грина имеют полюсы как функции \tilde{k}_j [11]. Обозначим область аналитичности функций Грина $G_j^\Pi(\gamma), G_j^\Psi(\gamma)$ (за вычетом разрезов и полюсов) через D .

Обозначим через Π_j и Ψ_j значения Π и Ψ в области Ω_j . Определим новые неизвестные функции и натуральный параметр t_0 параметризации кривой Γ с некоторыми (гладкими) функциями:

$$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), (x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 = 1, dl_0 = dt_0 \quad (0 \leq t_0 \leq 2\pi),$$

$$\varphi(t_0) := \Pi_j(x_0, y_0)|_\Gamma, \tag{13}$$

$$\chi(t_0) := \frac{\gamma}{\tilde{k}_j^2} \frac{\partial \Pi_j(x_0, y_0)}{\partial \tau} \Big|_\Gamma - \frac{1}{\tilde{k}_j^2} \frac{\partial \Psi_j(x_0, y_0)}{\partial n} \Big|_\Gamma. \tag{14}$$

Отметим, что такое определение корректно в силу условия (9). При этом «автоматически» учитываются первое и четвертое условия в (9).

Второе и третье условия из (9) примут вид

$$[\Psi]_\Gamma = i\sigma\chi, \tag{15}$$

$$\gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right]_\Gamma + \left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right]_\Gamma = i\sigma\varphi. \tag{16}$$

Принимая во внимание теоремы о предельных значениях потенциалов на границе Γ , получим систему интегральных уравнений [13]:

$$\gamma \int_\Gamma \left(\frac{\partial G_1^\Psi(x, y, x_0, y_0)}{\partial \tau_0} \Big|_\Gamma + \frac{\partial G_2^\Psi(x, y, x_0, y_0)}{\partial \tau_0} \Big|_\Gamma \right) \varphi(t_0) dl_0 +$$

$$+ \int_\Gamma \left(\tilde{k}_1^2 G_1^\Psi(x, y, x_0, y_0) \Big|_\Gamma + \right.$$

$$\left. + \tilde{k}_2^2 G_2^\Psi(x, y, x_0, y_0) \Big|_\Gamma \right) \chi(t_0) dl_0 + i\sigma\chi(t) = 0, (x, y) \in \Gamma, \tag{17}$$

$$\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \int_\Gamma \left(\frac{1}{\tilde{k}_1^2} \frac{\partial G_1^\Psi(x, y, x_0, y_0)}{\partial \tau_0} \Big|_\Gamma + \frac{1}{\tilde{k}_2^2} \frac{\partial G_2^\Psi(x, y, x_0, y_0)}{\partial \tau_0} \Big|_\Gamma \right) \varphi(t_0) dl_0 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma \int_{\Gamma} \left(G_1^{\Psi}(x, y, x_0, y_0) \Big|_{\Gamma} + G_2^{\Psi}(x, y, x_0, y_0) \Big|_{\Gamma} \right) \chi(t_0) dl_0 + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Gamma} \left(\frac{\varepsilon_1}{\tilde{k}_1^2} \frac{\partial G_1^{\Pi}(x, y, x_0, y_0)}{\partial n_0} \Big|_{\Gamma} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\varepsilon_2}{\tilde{k}_2^2} \frac{\partial G_2^{\Pi}(x, y, x_0, y_0)}{\partial n_0} \Big|_{\Gamma} \right) \varphi(t_0) dl_0 + i\sigma\varphi(t) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (18)
 \end{aligned}$$

При выводе (17) и (18) учтены результаты о предельных значениях потенциалов двойного и простого слоя, в частности, что нормальная производная потенциала двойного слоя имеет равные следы (в смысле распределений) с разных сторон Γ , а также, что касательная производная потенциала простого слоя также имеет равные следы (в смысле распределений) с разных сторон Γ [14].

Уравнения (17) и (18) в операторном виде запишутся следующим образом:

$$\gamma S_1 \varphi + \gamma S_2 \varphi + \tilde{k}_1^2 L_1 \chi + \tilde{k}_2^2 L_2 \chi + i\sigma \chi = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\gamma^2}{\tilde{k}_1^2} T_1 \varphi + \frac{\gamma^2}{\tilde{k}_2^2} T_2 \varphi + \gamma L_1 \chi + \gamma L_2 \chi + \frac{\varepsilon_1}{\tilde{k}_1^2} H_1 \varphi + \frac{\varepsilon_2}{\tilde{k}_2^2} H_2 \varphi + i\sigma \varphi = 0, \quad (20)$$

где операторы определяются посредством формул:

$$\begin{aligned}
 S_j \varphi & := \int_{\Gamma} \frac{\partial G_j^{\Psi}(x, y, x_0, y_0)}{\partial \tau_0} \Big|_{\Gamma} \varphi(t_0) dl_0, \quad (x, y) \in \Gamma, \\
 L_j \chi & := \int_{\Gamma} G_j^{\Psi}(x, y, x_0, y_0) \Big|_{\Gamma} \chi(t_0) dl_0, \quad (x, y) \in \Gamma, \\
 T_j \varphi & := \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Gamma} \frac{\partial G_j^{\Psi}(x, y, x_0, y_0)}{\partial \tau_0} \Big|_{\Gamma} \varphi(t_0) dl_0, \quad (x, y) \in \Gamma, \\
 H_j \varphi & := \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Gamma} \frac{\partial G_j^{\Pi}(x, y, x_0, y_0)}{\partial n_0} \Big|_{\Gamma} \varphi(t_0) dl_0, \quad (x, y) \in \Gamma,
 \end{aligned}$$

где в правых частях рассматриваются следы на Γ соответствующих функций.

Отметим, что функции Грина G_j^{Π}, G_j^{Ψ} имеют логарифмическую особенность вида

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}},$$

поэтому интегральные операторы L_j имеют логарифмическую особенность ядра, операторы S_j являются сингулярными, а операторы T_j, H_j – гиперсингулярными.

Эти операторы рассматриваются в пространствах:

$$L_j : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), S_j : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma),$$

$$T_j : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), H_j : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma).$$

В указанных пространствах все перечисленные операторы являются ограниченными [13].

Пусть $J : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ – оператор вложения $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$, который является компактным [15]. Решение системы уравнений (19), (20) будем искать в пространствах $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\chi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Перепишем систему (19), (20) в форме

$$(\gamma JS_1 + \gamma JS_2)\varphi + (\tilde{k}_1^2 JL_1 + \tilde{k}_2^2 JL_2)\chi + i\sigma\chi = 0, \quad (21)$$

$$\left(\frac{\gamma^2}{\tilde{k}_1^2} T_1 + \frac{\gamma^2}{\tilde{k}_2^2} T_2 \right) \varphi + \left(\frac{\varepsilon_1}{\tilde{k}_1^2} H_1 + \frac{\varepsilon_2}{\tilde{k}_2^2} H_2 \right) \varphi + i\sigma J\varphi + J(\gamma L_1 + \gamma L_2)\chi = 0. \quad (22)$$

Определим векторную функцию $(\varphi, \chi)^T \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ и представим систему (21), (22) в блочном виде:

$$A \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} + i\sigma I \\ A_{21} + K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где операторы определены формулами:

$$K_{11} = \gamma JS_1 + \gamma JS_2, K_{12} = \tilde{k}_1^2 JL_1 + \tilde{k}_2^2 JL_2, A_{21} = \frac{\gamma^2}{\tilde{k}_1^2} T_1 + \frac{\gamma^2}{\tilde{k}_2^2} T_2 + \frac{\varepsilon_1}{\tilde{k}_1^2} H_1 + \frac{\varepsilon_2}{\tilde{k}_2^2} H_2,$$

$$K_{21} = i\sigma J, K_{22} = J(\gamma L_1 + \gamma L_2),$$

причем операторы $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ являются компактными, а оператор A_{21} фредгольмов [13]. Тогда блочный оператор (23) также фредгольмов [13].

Введем оператор

$$H_0\varphi := \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \Big|_{\Gamma} \varphi(t_0) dl_0, (x, y) \in \Gamma. \quad (24)$$

Поддействовав на второе уравнение системы (23), обратимым оператором $(H_0 + K_0)^{-1} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, получим эквивалентную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} + i\sigma I \\ I + \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

с компактными операторами $\tilde{K}_{21}, \tilde{K}_{22}$. Подчеркнем, что операторы H_0, K_0 и $(H_0 + K_0)^{-1}$ не зависят от γ , поэтому проведенные преобразования не влияют на спектральные свойства систем уравнений.

С помощью перечисленных свойств операторов в [13] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. При $\sigma \neq 0$ оператор A системы (23) является фредгольмовым с нулевым индексом.

3. Дискретность спектра оператор-функции

Из теоремы 1 находим, что оператор-функция $A = A(\gamma)$ в области D фредгольмова в рассматриваемых пространствах. Из аналитичности функций Грина в области D заключаем, что $A(\gamma)$ голоморфна в D .

Пусть выполнены условия $\varepsilon_j = \varepsilon_j' + i\varepsilon_j''$, $\sigma = \sigma' + i\sigma''$, $\varepsilon_j' > 0$, $\varepsilon_j'' \geq 0$, $\sigma' \geq 0$, $\sigma'' \geq 0$, $\sigma \neq 0$; $j = 1, 2$. В работе [13] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнено хотя бы одно из условий: 1) $\varepsilon_1'' > 0$; 2) $\varepsilon_2'' > 0$; 3) $\sigma' > 0$. Тогда оператор-функция $A(\gamma)$ имеет дискретный спектр в D , т.е. спектр оператор-функции $A(\gamma)$ представляет собой изолированное множество характеристических чисел конечной алгебраической кратности с возможными точками накопления на границе области D .

При $\gamma \in D$ функции Грина G_j^Π, G_j^Ψ существуют. Отметим также, что теорема 2 не утверждает существование характеристических чисел.

Теоремы 1 и 2 необходимы для корректного применения численного проекционного метода нахождения приближенных собственных значений задачи (характеристических чисел оператор-функции). Обоснование представленного ниже численного проекционного метода можно выполнить по схеме, изложенной в [16, 17].

4. Численный метод и результаты расчетов

Пусть Ω_1 – круг радиуса $R > 0$, а Ω_2 – внешность круга; (r, ϕ) – полярные координаты. Представим функции Грина для уравнения Гельмгольца с волновым числом \tilde{k}_1 или \tilde{k}_2 для соответствующих краевых задач [12].

Функция Грина с краевыми условиями 2-го рода для внутренней задачи в Ω_1 имеет вид

$$G_1^\Psi(r_0, \phi_0, r, \phi; \tilde{k}_1) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\tilde{k}_1 r)}{J_n'(\tilde{k}_1 R)} (J_n(\tilde{k}_1 r_0) N_n'(\tilde{k}_1 R) - J_n'(\tilde{k}_1 R) N_n(\tilde{k}_1 r_0)) \times \\ \times e^{in(\phi - \phi_0)}, & r < r_0 \leq R, \\ \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\tilde{k}_1 r_0)}{J_n'(\tilde{k}_1 R)} (J_n(\tilde{k}_1 r) N_n'(\tilde{k}_1 R) - J_n'(\tilde{k}_1 R) N_n(\tilde{k}_1 r)) \times \\ \times e^{in(\phi - \phi_0)}, & r_0 < r \leq R. \end{cases}$$

Для ее значений на границе круга получаем формулу

$$G_1^\Psi(R, \phi_0, R, \phi; \tilde{k}_1) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\tilde{k}_1 R)}{J'_n(\tilde{k}_1 R)} \times \\ \times (J_n(\tilde{k}_1 R) N'_n(\tilde{k}_1 R) - J'_n(\tilde{k}_1 R) N_n(\tilde{k}_1 R)) e^{in(\phi - \phi_0)},$$

или, учитывая значения вронскиана [18]:

$$G_1^\Psi(R, \phi_0, R, \phi; \tilde{k}_1) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\tilde{k}_1 R)}{J'_n(\tilde{k}_1 R)} \frac{2}{\pi \tilde{k}_1 R} e^{in(\phi - \phi_0)}.$$

Для касательной производной этой функции находим

$$\left. \frac{\partial}{\partial \phi_0} G_1^\Psi \right|_\Gamma = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-in) \frac{J_n(\tilde{k}_1 R)}{J'_n(\tilde{k}_1 R)} \times \\ \times (J_n(\tilde{k}_1 R) N'_n(\tilde{k}_1 R) - J'_n(\tilde{k}_1 R) N_n(\tilde{k}_1 R)) e^{in(\phi - \phi_0)} = \\ = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-in) \frac{J_n(\tilde{k}_1 R)}{J'_n(\tilde{k}_1 R)} \frac{2}{\pi \tilde{k}_1 R} e^{in(\phi - \phi_0)}.$$

Далее имеем

$$\left. \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi_0} G_1^\Psi \right|_\Gamma = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \frac{J_n(\tilde{k}_1 R)}{J'_n(\tilde{k}_1 R)} \times \\ \times (J_n(\tilde{k}_1 R) N'_n(\tilde{k}_1 R) - J'_n(\tilde{k}_1 R) N_n(\tilde{k}_1 R)) e^{in(\phi - \phi_0)} = \\ = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \frac{J_n(\tilde{k}_1 R)}{J'_n(\tilde{k}_1 R)} \frac{2}{\pi \tilde{k}_1 R} e^{in(\phi - \phi_0)}.$$

Функция Грина для уравнения Гельмгольца с волновым числом \tilde{k}_1 с крайними условиями 1-го рода для внутренней задачи в Ω_1 имеет вид

$$G_1^\Pi(r_0, \phi_0, r, \phi; \tilde{k}_1) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\tilde{k}_1 r)}{J_n(\tilde{k}_1 R)} (J_n(\tilde{k}_1 r_0) N_n(\tilde{k}_1 R) - J_n(\tilde{k}_1 R) N_n(\tilde{k}_1 r_0)) \times \\ \times e^{in(\phi - \phi_0)}, & r < r_0 \leq R, \\ \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\tilde{k}_1 r_0)}{J_n(\tilde{k}_1 R)} (J_n(\tilde{k}_1 r) N_n(\tilde{k}_1 R) - J_n(\tilde{k}_1 R) N_n(\tilde{k}_1 r)) \times \\ \times e^{in(\phi - \phi_0)}, & r_0 < r \leq R. \end{cases}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_0} G_1^\Pi \Big|_\Gamma &= \frac{1}{4} \tilde{k}_1^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J'_n(\tilde{k}_1 R)}{J_n(\tilde{k}_1 R)} \left(J'_n(\tilde{k}_1 R) N_n(\tilde{k}_1 R) - J_n(\tilde{k}_1 R) N'_n(\tilde{k}_1 R) \right) \times \\ &\times e^{in(\phi-\phi_0)} = \frac{1}{4} \tilde{k}_1^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J'_n(\tilde{k}_1 R)}{J_n(\tilde{k}_1 R)} \frac{2}{\pi \tilde{k}_1 R} e^{in(\phi-\phi_0)}. \end{aligned}$$

Функция Грина для уравнения Гельмгольца с волновым числом \tilde{k}_2 с краевыми условиями 2-го рода для внешней задачи в Ω_2 имеет вид

$$G_2^\Psi(r_0, \phi_0, r, \phi; \tilde{k}_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 r_0)}{H_n^{(1)\prime}(\tilde{k}_2 R)} \times \left(J'_n(\tilde{k}_2 R) N_n(\tilde{k}_2 r) - \right. \\ \left. - J_n(\tilde{k}_2 r) N'_n(\tilde{k}_2 R) \right) e^{in(\phi-\phi_0)}, & R \leq r < r_0, \\ \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 r)}{H_n^{(1)\prime}(\tilde{k}_2 R)} \times \left(J'_n(\tilde{k}_2 R) N_n(\tilde{k}_2 r_0) - \right. \\ \left. - J_n(\tilde{k}_2 r_0) N'_n(\tilde{k}_2 R) \right) e^{in(\phi-\phi_0)}, & R \leq r_0 < r. \end{cases}$$

Для ее значений на границе круга получаем формулу

$$G_2^\Psi(R, \phi_0, R, \phi; \tilde{k}_2) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 R)}{H_n^{(1)\prime}(\tilde{k}_2 R)} \frac{2}{\pi \tilde{k}_2 R} e^{in(\phi-\phi_0)}.$$

Для касательной производной этой функции находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_0} G_2^\Psi \Big|_\Gamma &= \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-in) \frac{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 R)}{H_n^{(1)\prime}(\tilde{k}_2 R)} \left(J_n(\tilde{k}_2 R) N'_n(\tilde{k}_2 R) - \right. \\ &\left. - J'_n(\tilde{k}_2 R) N_n(\tilde{k}_2 R) \right) e^{in(\phi-\phi_0)} = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-in) \frac{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 R)}{H_n^{(1)\prime}(\tilde{k}_2 R)} \frac{2}{\pi \tilde{k}_2 R} e^{in(\phi-\phi_0)}. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi_0} G_2^\Psi \Big|_\Gamma &= \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \frac{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 R)}{H_n^{(1)\prime}(\tilde{k}_2 R)} \left(J_n(\tilde{k}_2 R) N'_n(\tilde{k}_2 R) - \right. \\ &\left. - J'_n(\tilde{k}_2 R) N_n(\tilde{k}_2 R) \right) e^{in(\phi-\phi_0)} = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \frac{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 R)}{H_n^{(1)\prime}(\tilde{k}_2 R)} \frac{2}{\pi \tilde{k}_2 R} e^{in(\phi-\phi_0)}. \end{aligned}$$

Функция Грина для уравнения Гельмгольца с волновым числом k с крайними условиями 1-го рода для внешней задачи в Ω_2 имеет вид

$$G_2^{\Pi}(r_0, \phi_0, r, \phi; \tilde{k}_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 r_0)}{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 R)} (J_n(\tilde{k}_2 R) N_n(\tilde{k}_2 r) - \\ - J_n(\tilde{k}_2 r) N_n(\tilde{k}_2 R)) e^{in(\phi - \phi_0)}, R \leq r < r_0, \\ \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 r)}{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 R)} (J_n(\tilde{k}_2 R) N_n(\tilde{k}_2 r_0) - \\ - J_n(\tilde{k}_2 r_0) N_n(\tilde{k}_2 R)) e^{in(\phi - \phi_0)}, R \leq r_0 < r. \end{cases}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_0} G_2^{\Pi} \right|_{\Gamma} &= \frac{1}{4} \tilde{k}_2^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)'}(\tilde{k}_2 r)}{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 R)} (J_n'(\tilde{k}_2 R) N_n(\tilde{k}_2 r) - \\ &- J_n(\tilde{k}_2 R) N_n'(\tilde{k}_2 r)) e^{in(\phi - \phi_0)} = \frac{1}{4} \tilde{k}_2^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^{(1)'}(\tilde{k}_2 r)}{H_n^{(1)}(\tilde{k}_2 R)} \frac{2}{\pi \tilde{k}_2 R} e^{in(\phi - \phi_0)}. \end{aligned}$$

Заметим, что представленные выше ряды не сходятся в классическом смысле и понимаются в смысле распределений (обобщенных функций) [12]. Медленно сходящиеся части рядов, содержащие особенность, можно аналитически просуммировать [12] и получить, соответственно, ядра логарифмического, сингулярного и гиперсингулярного операторов. Метод суммирования медленно сходящихся частей рядов обычно применяется при численном решении интегральных уравнений.

Рассмотрим проекционный метод решения задачи на собственные значения. Будем искать приближенные решения системы интегральных уравнений в виде (здесь $t_0 = \phi_0$):

$$\varphi_m(\phi_0) = \sum_{m=-N}^N b_m e^{im\phi_0}, \quad \chi_m(\phi_0) = \sum_{m=-N}^N c_m e^{im\phi_0}, \quad (26)$$

с неизвестными коэффициентами b_m, c_m . Подставляя (26) в (23) и учитывая ортогональность функций $e^{im\phi_0}$ на $[0, 2\pi]$, получим

$$A(\gamma) \begin{pmatrix} \varphi_m \\ \chi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_m \\ X_m \end{pmatrix},$$

где $\Phi_m(\phi) = \sum_{m=-N}^N B_m(\gamma) e^{im\phi}$, $X_m(\phi) = \sum_{m=-N}^N C_m(\gamma) e^{im\phi}$ с некоторыми коэффициентами $B_m(\gamma)$, $C_m(\gamma)$.

Функции $e^{im\phi_0}$ образуют базис в пространствах $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$, поэтому имеем уравнения

$$B_m(\gamma) = 0, C_m(\gamma) = 0, \quad (27)$$

из которых находим приближенные решения задачи на собственные значения. Уравнения (27) решаются численно для каждого $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В случае нелинейной зависимости проводимости от электрического поля имеем $\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(3)}(|\chi|^2 + |\phi|^2)$. Расчеты для нелинейного случая будут представлены в следующей публикации.

Ниже представлены результаты расчетов постоянных распространения трех поверхностных волн в зависимости от R в случае $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 1$, $\sigma = 0, 2$ при $N = 0$ и $N = 1$. Учитывая, что все величины безразмерные, можно считать, что показана зависимость нормированных постоянных распространения от частоты.

Из графиков на рис. 1 и 2 видно, что постоянные распространения для этих волн не зависят от N . При увеличении N и R число волн будет, вообще говоря, увеличиваться.

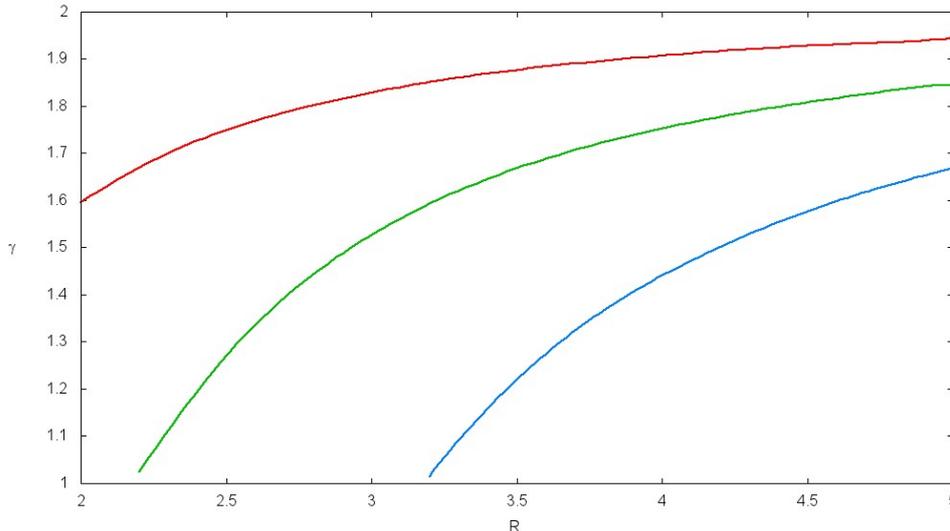


Рис. 1. Зависимость нормированной постоянной распространения для трех волн от нормированного радиуса при $N = 0$

Отметим, что с помощью предложенного метода можно находить не только постоянные распространения поверхностных волн, но и комплексные постоянные распространения комплексных волн, а также вытекающих волн.

Заключение

В статье рассмотрен численный метод решения задачи на собственные значения о распространении электромагнитных волн в диэлектрическом стержне круглого поперечного сечения, покрытом графеном. Методом функ-

ций Грина задача сведена к фредгольмовой системе интегральных уравнений на поверхности диэлектрика в пространствах Соболева. Изучена оператор-функция, отвечающая системе интегральных уравнений.

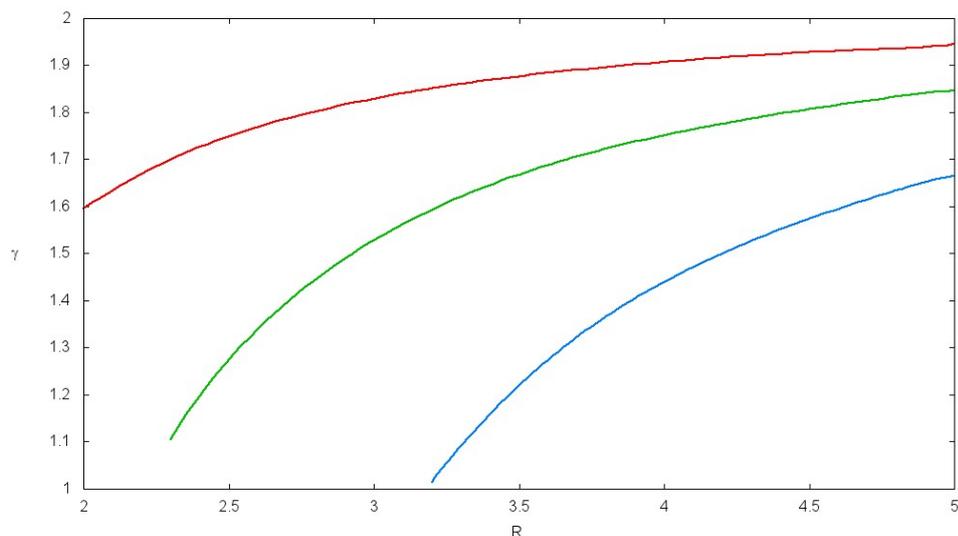


Рис. 2. Зависимость нормированной постоянной распространения для трех волн от нормированного радиуса при $N = 1$

Предложен численный метод решения системы интегральных уравнений и задачи на собственные значения. Представлены результаты численных расчетов постоянных распространения поверхностных волн в диэлектрическом круглом стержне, покрытом графеном.

Список литературы

1. Geim A. K., Novoselov K. S. The rise of graphene // *Nature Materials*. 2007. Vol. 6. P. 183–191.
2. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // *Journal of Applied Physics*. 2008. Vol. 103. P. 064302.
3. Falkovsky L. A. Optical properties of graphene // *Journal of Physics: Conference Series*. 2008. Vol. 129. P. 012004.
4. Mikhailov S. A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene // *Physical Review B*. 2016. Vol. 93. P. 085403.
5. Hajian H., Rukhlenko I. D., Leung P. T., Caglayan H., Ozbay E. Guided plasmon modes of a graphene-coated Kerr slab // *Plasmonics*. 2016. Vol. 11. P. 735–741.
6. Smirnov Y., Tikhov S. The Nonlinear Eigenvalue Problem of Electromagnetic Wave Propagation in a Dielectric Layer Covered with Graphene // *Photonics*. 2023. Vol. 10. P. 523.
7. Смирнов Ю. Г., Тихов С. В., Гусарова Е. В. О распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, покрытом графеном // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2022. № 3. С. 11–18.
8. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. 268 с.
9. Shestopalov Y., Smirnov Y., Smolkin E. *Optical Waveguide Theory // Mathematical Models, Spectral Theory and Numerical Analysis*. Springer, 2022. Vol. 237. 260 p.

10. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.
11. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М. : Мир, 1977. 504 с.
12. Chernokozhin E. V., Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu. G. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics. Utrecht, 2000. 117 с.
13. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости системы интегральных уравнений в задаче о распространении электромагнитных волн в стержне, покрытом графеном // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 74–86.
14. Costabel M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results // SIAM J. Math. Anal. 1988. Vol. 19, № 3. P. 613–626.
15. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М. : Мир, 1980. 664 с.
16. Вайникко Г. М., Карма О. О. О скорости сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 14, № 6. С. 1393–1408.
17. Вайникко Г. М., Карма О. О. О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 14, № 4. С. 828–837.
18. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М. : Наука, 1979. 831 с.

References

1. Geim A.K., Novoselov K.S. The rise of graphene. *Nature Materials*. 2007;6:183–191.
2. Hanson G.W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene. *Journal of Applied Physics*. 2008;103:064302.
3. Falkovsky L.A. Optical properties of graphene. *Journal of Physics: Conference Series*. 2008;129:012004.
4. Mikhailov S.A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene. *Physical Review B*. 2016;93:085403.
5. Hajian H., Rukhlenko I.D., Leung P.T., Caglayan H., Ozbay E. Guided plasmon modes of a graphene-coated Kerr slab. *Plasmonics*. 2016;11:735–741.
6. Smirnov Y., Tikhov S. The Nonlinear Eigenvalue Problem of Electromagnetic Wave Propagation in a Dielectric Layer Covered with Graphene. *Photonics*. 2023;10:523.
7. Smirnov Yu.G., Tikhov S.V., Gusarova E.V. On the propagation of electromagnetic waves in a dielectric layer coated with graphene. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2022;3:11–18. (In Russ.)
8. Smirnov Yu.G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki = Mathematical methods for studying electrodynamic problems*. Penza: Inf.-izd. tsentr PenzGU, 2009:268. (In Russ.)
9. Shestopalov Y., Smirnov Y., Smolkin E. Optical Waveguide Theory. *Mathematical Models, Spectral Theory and Numerical Analysis*. Springer, 2022;237:260.
10. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1981:512. (In Russ.)
11. Mizokhata S. *Teoriya uravneniy s chastnymi proizvodnymi = Theory of partial differential equations*. Moscow: Mir, 1977:504. (In Russ.)
12. Chernokozhin E.V., Shestopalov Yu.V., Smirnov Yu.G. *Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics*. Utrecht, 2000:117.
13. Smirnov Yu.G. On the Fredholm property of integral equations system in the problem of electromagnetic waves propagation in a graphene coated rod. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(3):74–86. (In Russ.)

14. Costabel M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results. *SIAM J. Math. Anal.* 1988;19(3):613–626.
15. Tribel' Kh. *Teoriya interpolyatsii, funktsional'nye prostranstva, differentsial'nye operatory = Interpolation theory, function spaces, differential operators.* Moscow: Mir, 1980:664. (In Russ.)
16. Vaynikko G.M., Karma O.O. On the speed of convergence of approximate methods in the eigenvalue problem with nonlinear occurrence of a parameter. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics.* 1974;14(6):1393–1408. (In Russ.)
17. Vaynikko G.M., Karma O.O. On the convergence of approximate methods for solving linear and nonlinear operator equations. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics.* 1974;14(4):828–837. (In Russ.)
18. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam = Special functions reference.* Moscow: Nauka, 1979:831. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Yuriy G. Smirnov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Марина Александровна Москалева

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

Marina A. Moskaleva

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 13.10.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 15.11.2023

Принята к публикации / Accepted 01.12.2023